数理解析研究所講究録
146巻 1972年 89-105

半完全最大値の原理をみたす potential 作用素について.

静岡大 理　近藤亮司

E を才2可算公理をみたす局所 compact な Hausdorff 空間とし. E の Borel 集合全体の σ-代数を $\mathcal{E}$ で表わす。又 E 上の実数値で有界な $\mathcal{E}$-可測関数全体を $\mathbb{B}$, 有界な連続関数全体を $\mathbb{C}$ で表わす. $\mathbb{B}$ 及び $\mathbb{C}$ はそれぞれ一様ノルム $\|f\| = \sup|f(x)|$ により Banach 空間となる。

今 E 上に、台が全空間 E と一致するような正の Radon 測度 μ が与えられたとし. 任意の compact 集合 $F \subset E$ にたいし.

$$\mathbb{N}_F(\mu) = \{ f \in \mathbb{B} \mid \mathrm{supp}(f) \subset F,\ \langle \mu, f \rangle = \int f d\mu = 0 \}$$

とする. 各 $\mathbb{N}_F(\mu)$ に対しては一様ノルムで位相を与え. その帰納極限

$$\mathbb{N}(\mu) = \bigcup_{F:\mathrm{compact} \subset E} \mathbb{N}_F(\mu)$$

を考える. $\mathbb{N}(\mu)$ は局所凸な線型位相空間となる. 特に誤解

のおそれのないときは，$N_F(\mu)$，$N(\mu)$ の代りに N_F，N と書くこともある。このノートでは，$N(\mu)$ の元を（μ に関する）null charge といい，$N(\mu)$ から $\mathbb{C}$ への連続線型写像を potential 作用素と呼ぶ。

potential 作用素 V は次の条件：

(SCM) 集合 $\{f>0\}$ 上で $Vf \leq m$ （m は実数）ならば

全空間 E 上で $Vf \leq m$.

をみたすとき，半完全最大値原理 (semi-complete principle of maximum) をみたすといわれる。例えば

例 1. $E=R^1$, $\mu(dx)=dx$

$$Vf(x) = -\int_{R^1} |x-y| f(y)dy$$

例 2 $E=R^1$ 又は R^2 $\mu(dx)=dx$

$$Vf(x) = \frac{1}{\pi}\int_E [\log|x-y|] f(y)dy$$

例 3. $E=\{x\in R^2 \mid |x|\leqslant 1\}$ $\mu(dx)=dx$

$$Vf(x) = \int_E v(x,y) f(y)dy$$

v は Δ（ラプラシアン）に対する Neumann 核，

等は，そのような potential 作用素になっている。

以下，このような (SCM) をみたす potential 作用素が，

次に定式化するような意味である種の resolvent から自然に出て来ること、及び、ある場合には、このような potential 作用素から resolvent が構成されることを述べる。

1、記号及び諸定義．

$(E, \mathcal{E})$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ は今迄通りとする．写像 $K: E \times \mathcal{E} \to R = (-\infty, \infty)$ は．

K.1) 固定した x に対し．$A \longmapsto K(x, A)$ は $\mathcal{E}$ 上の測度

K.2) 固定した A に対し．$x \longmapsto K(x, A)$ は $\mathcal{E}$-可測．

の2条件をみたすとき．$(E, \mathcal{E})$ 上の核と呼ばれる．核 K, H, 関数 f, 測度 μ に対しそれが定義される限り．

$$Kf: \quad Kf(x) = \int K(x, dy) f(y),$$

$$\mu K: \quad \mu K(A) = \int \mu(dx) K(x, A),$$

$$KH: \quad KH(x, A) = \int K(x, dy) H(y, A).$$

と定める。又核 K は．$K(x, A) \geqq 0$ $(\forall x \in E, A \in \mathcal{E})$ かつ．$K1(x) \leqq 1$ $(\forall x \in E)$ のとき劣 Markov 型、$K1(x) = 1$ $(\forall x \in E)$ のとき Markov 型と呼ばれる。正の実数 $p > 0$ を係数とする核の集合 $(V_p)_{p>0}$ があって．

V.1) (Markov 型)

$$\forall p > 0 \text{ に対し} \quad pV_p 1 = 1.$$

V.2) (resolvent 方程式)

$$V_p - V_q + (p-q)V_p V_q = 0 \qquad (\forall p, q > 0)$$

をみたすとき Markov resolvent と呼ばれる。V.1) が

V.1$_s$) (劣 Markov 型)

$$\forall p>0 \text{ に対し } \quad pV_p 1 \leqq 1$$

と弱められているときは劣 Markov resolvent と言う。

(劣) Markov resolvent が更に

V.3) (強 Feller)

$$\forall p>0 \text{ に対し } \quad V_p : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$$

をみたすとき、強 Feller，その上、

V.4) (再帰的)

∀開集合 B (≠φ) に対し、

$$\sup_{p>0} V_p(x, B) = \infty \qquad (\forall x \in E)$$

をみたすとき再帰的と言うことにする。強 Feller で再帰的な劣 Markov resolvent は Markov resolvent であることが示される。

以下の議論で Markov 過程の結果は必ずしも必要ではないが記号を簡単にしたり内容を直観的に理解するには大いに役立つので離散係数の Markov 過程の定義だけ与えておく。

E の1点 compact 化を $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ とし、(E がそれ自身 compact のときは、Δ は孤立点としてつけ加える)。E_Δ の Borel 集合全体を $\mathcal{E}_\Delta$ とする。$Z_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$

として．$\mathbb{Z}_+$ から E_Δ への写像 ω で，もし $\omega(n)=\Delta$ ならすべての $m \geqq n$ に対し，$\omega(m)=\Delta$ となるようなものの集合を Ω とする。$\omega \in \Omega$ の n 座標 $\omega(n)$ を $X_n(\omega)$ とかくと各 n に対し，X_n は Ω から E_Δ への写象になっている。$\mathcal{B}_n = (X_0, X_1, \cdots, X_n)^{-1}(\mathcal{E}_\Delta^{n+1})$ $(n=0,1,2\cdots)$ とし，$\mathcal{B}_n$ をすべて含む最小の σ-代数を $\mathcal{B}_\infty$ とする．
又各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し，Ω から Ω への写像 θ_n を $(\theta_n\omega)(m) = \omega(n+m)$ により定義する．定義から．$X_m \circ \theta_n = X_{m+n}$ $(\forall m, n \in \mathbb{Z}_+)$ である。

今．$(E, \mathcal{E})$ 上に Markov 核 P が与えられると．各 $x \in E$ に対し．$(\Omega, \mathcal{B}_\infty)$ 上の確率測度 P_x があって．

$$P_x(\{\omega \mid X_1(\omega) \in A_1, \cdots, X_n(\omega) \in A_n\})$$

$$= \int_{A_1} \cdots \int_{A_{n-1}} P(x, dx_1) P(x_1, dx_2) \cdots P(x_{n-1}, A_n)$$

がすべての $n \geqq 1$，すべての $A_1, \cdots A_n \in \mathcal{E}$ に対し成り立つように出来ることが知られている。このとき．

$$X = (\Omega, (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}, (P_x)_{x \in E})$$

を，P を推移確率とする Markov process と言う.

2. 不変測度

$(V_p)_{p>0}$ を V.1)，V.2)，V.3)，V.4) をみたす $(E, \mathcal{E})$

上の Markov resolvent とする。次の定理はよく知られていることであり、現在ではより一般な条件で成り立つことが知られているが、不変測度のあしらえと公式が後の話と関係して来る。

定理 1. $(V_p)_{p>0}$ に対し、

$V.5)$ (不変測度)

$$\forall p>0 \text{ に対し } p\mu V_p = \mu$$

をみたす、E全体を台とする正の Radon 測度が存在し、しかもそれは定数倍を除いて唯一通りにきまる。

証明の大筋. $Q = V_1$ とおくと、Q は (E, Σ) 上の Markov 核なので、Q を推移確率とする Markov 過程を $X = (\Omega, (X_n), (\theta_n), (P_x))$ とする。こゝでその内部が空でない compact set $F \subset E$ をとり、(E自身 compact なら $E = F$ とする).

$$T_F = \inf\{n \geqq 1 \mid X_n \in F\} \qquad (\inf \phi = \infty)$$

とおく。こゝで F 上の核 Q^F を

(0) $Q^F(x, A) = P_x(X_{T_F} \in A) \qquad (x \in F,\ A \subset F)$

により定義する.(解析的には

$$Q^F = \sum_{n=0}^{\infty} (J_{F^c} Q)^n Q J_F \qquad (J_F \text{ は } F \text{ への制限})$$

である。) Q^F は F 上の Markov 核である F 上の確率測度 ν_F, 定数 $c>0$, $0<\gamma<1$ があって

(1) $$\sup_{x \in F} \| Q^n(x, \cdot) - \nu_F(\cdot) \| \leqslant c\gamma^n \qquad (n = 1, 2 \cdots)$$

($\| \ \|$は測度の全変動）が成り立つことが示される。従って、ν_Fは、$\nu_F Q^F = \nu_F$をみたす唯一つの確率測度である。

次に、$F \times \mathcal{E}$上の関数G^Fを

(2) $$G^F(x, B) = E_x\left(\sum_{0 \leqq n < T_F} 1_B \circ X_n\right)$$

により定義する。この時$K \subset E$がcompactであれば

$$\sup_{x \in F} G^F(x, K) < \infty$$

が示される。こゝで

(3) $$\mu = \nu_F G^F$$

とおけばμは、E全体を台とするRadon測度で、

(4) $$\mu Q = \mu \quad 即ち \quad \mu V_1 = \mu$$

となる。Resolvent方程式 $V_p - V_1 + (p-1) V_1 V_p = 0$ より、V.5）が得られる。

3. Potential作用素

$(V_p)_{p>0}$をV.1）～V.4）をみたすMarkov resolventとし、μをその不変測度、μに関するnull chargeの空間を$\mathbb{N}$とする。このとき

<u>定理2</u>　$\mathbb{N}$から$\mathbb{C}$への連続線型写像Vが存在して

V.6）（Poisson方程式）

$$V_p f - V f + p V_p V f = 0 \qquad (\forall f \in \mathbb{N})$$

をみたす．また $\tilde{\nabla}$ を (V.6) をみたす $\mathbb{N}$ から $\mathbb{C}$ への連続線型写像とすると，$\mathbb{N}$ の共役空間 $\mathbb{N}'$ の元 l が存在して

$$\tilde{\nabla} f = \nabla f + l(f) \qquad \forall f \in \mathbb{N}$$

となる．

証明の大筋．$Q = \nabla_1$ とし，Q^F を (0) により定義される F 上の Markov kernel とする．ν_F に関する F 上の null charge f_F に対し，

$$\begin{aligned} &\| \sum_{k=n}^{m} (Q^F)^k f_F \| \\ &= \| \sum_{k=n}^{m} (Q^F)^k f_F - \langle \nu_F, f_F \rangle \| \\ &\leqq c \| f_F \| \sum_{k=n}^{m} \gamma^k \end{aligned}$$

となるので，

$$(5) \qquad L^F f_F = \sum_{n=0}^{\infty} (Q^F)^n f_F \qquad f_F \in \mathbb{N}(\nu_F)$$

により，$\mathbb{N}(\nu_F)$ から $\mathbb{B}_F$（F 上の有界可測関数）への連続写像 L^F が定義される。L^F は明らかに

$$(6) \qquad (I - Q^F) L^F f_F = f_F \qquad f_F \in \mathbb{N}(\nu_F)$$

をみたす．次に Markov 過程 X を用いて，

$$T_F^0 = \inf\{n \geqq 0 \mid X_n \in F\}$$

とおき，$(E, \mathcal{E})$ 上の核 N^F, H^F を

$$(6) \qquad N^F(x, B) = E_x\Big(\sum_{0 \leqq n < T_F^0} 1_B \circ X_n\Big)$$

(7) $H^F(x, B) = P_x(X_{T_F^\circ} \in B)$

により定義する。Kがcompactのときは

$$\sup_{x\in E} N^F(x, K) < \infty$$

となることは G^F と同じである。

こゝで $f \in \mathbb{N}(\mu)$ に対し、$G^F f$ を考えると、$G^F f$ は $\mathbb{B}$ に属し、$G^F f$ の F 上への制限を $(G^F f)_F$ とかくと、

$$<\nu_F, (G^F f)_F> = <\nu_F G^F, f> = <\mu, f> = 0$$

となる。従って $(G^F f)_F$ には L^F を作用させることが出来るので

(8) $\cancel{\mathfrak{W}} G f = N^F f + H^F L^F G^F f$

と定義する。G は任意の compact set K に対し、

$$\| G f \| \leq [\sup_x N^F(x, K) + \| L^F \| \sup_x G^F(x, K)] \| f \|$$

$$(\forall f \in \mathbb{N}_K(\mu))$$

をみたすので $\mathbb{N}$ から $\mathbb{B}$ への線型連続写像である。

$x \in F$ のとき成立する関係式

$N^F(x, B) = 0$, $Q N^F(x, B) = G^F(x, B) - 1_B(x)$

$Q H^F(x, B) = Q^F(x, B)$ $(B \subset F)$

$(I - Q^F) L^F f_F(x) = f_F(x)$ $(f_F \in \mathbb{N}(\nu_F))$

$x \notin F$ のとき成立する関係式

$Q H^F(x, B) = H^F(x, B)$

を用いると、G は方程式

(9) $\quad Gf - QGf = f \qquad \forall f \in \mathbb{N}(\mu)$

即ち, $Gf - \mathbb{V}_1 Gf = f \quad (f \in \mathbb{N}(\mu))$ をみたすことが分る.

ここで

(10) $\quad \mathbb{V} f = Gf - f \qquad (f \in \mathbb{N}(\mu))$

と定義すれば $\mathbb{V}$ は $\mathbb{N}(\mu)$ から $\mathbb{B}$ への連続線型写像となり, resolvent 方程式より Poisson 方程式 Ⅴ.6) をみたすことが分る. Ⅴ.6) を書きかえると

$$\mathbb{V}_p (I + p\mathbb{V}) f = \mathbb{V} f \qquad (f \in \mathbb{N}(\mu))$$

となるので強 Feller の条件 (Ⅴ.3) より $\mathbb{V} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ である.

又, $\tilde{\mathbb{V}}$ をそのような他の写像とすると

$$\mathbb{V} f - \tilde{\mathbb{V}} f = p\mathbb{V}_p (\mathbb{V} f - \tilde{\mathbb{V}} f)$$

となり, (Ⅴ.4) より $\mathbb{V} f - \tilde{\mathbb{V}} f =$ 定数であることが分る.

従って $l \in \mathbb{N}'$ により $\tilde{\mathbb{V}} f = \mathbb{V} f + l(f)$ とかける.

4. 半完全最大値の原理

$(\mathbb{V}_p)_{p>0}$ を Ⅴ.1) ~ Ⅴ.4) をみたす Markov resolvent, μ を不変測度, $\mathbb{V}$ を potential 作用素とする. $Q_p = p\mathbb{V}_p$,

$G_p f = (I + p\mathbb{V}) f \quad (f \in \mathbb{N}(\mu))$ とおくと,

(11) $\quad (I - Q_p) G_p f = f \qquad (f \in \mathbb{N}(\mu))$

となることが (Ⅴ.6) から分る. このとき, 任意の $p > 0$ に対し, G_p は次の最大値原理をみたす.

補助定理. 任意の $f \in \mathbb{N}(\mu)$ に対し, $\{f>0\}$ 上で $G_p f \leqq m$, かつ, $\mu(\{f>0\})>0$ であれば, 全空間 E で, $G_p f \leqq m - f^-$ が成り立つ. (強められた半完全最大値の原理).

$(f^- = \max(-f, 0)$. 同じく $f^+ = \max(f, 0))$

証明には Q_p を推移確率とする Markov 過程 $X^{(p)} = (\Omega, (x_n), (\theta_n), P_x^{(p)})$ を用いるのが最も直観的で早い. $A = \{f>0\}$ とおくと, 任意の $x \in E$ に対し.

$$G_p f(x) = E_x^{(p)}\Big(\sum_{0 \leqq n < T_A^\circ} f \circ X_n\Big) + E_x^{(p)}\big(f \circ X_{T_A^\circ}\big)$$

$$= -E_x^{(p)}\Big(\sum_{0 \leqq n < T_A^\circ} f^- \circ X_n\Big) + E_x^{(p)}\big(f \circ X_{T_A^\circ}\big)$$

$$\leqq -f^-(x) + m.$$

この補助定理から次の定理が得られる。

定理 3　∇ は半完全最大値の原理をみたす。

証明. $\{f>0\}$ 上で $\nabla f \leqq m$ とする. もし $\mu(\{f>0\})>0$ であれば, $\{f>0\}$ 上で

$$G_p f = f + p\nabla f \leqq m + \|f\|$$

であるから E 上で $G_p f \leqq m + \|f\| - f^- \leqq m + \|f\|$

両辺を p で割り, $p \uparrow \infty$ とすれば $\nabla f \leqq m$ が E 上で成り立つ. $\mu(\{f>0\}) = 0$ のときは. $f \leqq 0$ μ-a.e.

従って. $\langle \mu, p\nabla_p f^\pm \rangle = \langle \mu, f^\pm \rangle = 0$ となるが $p\nabla_p f^\pm \geqq 0$ で $\nabla.3)$ により連続であるから $p\nabla_p f^\pm = 0$.

このことから $\nabla f = p\nabla_p \nabla f$ $(\forall p>0)$ となり. ∇f = 定数. 従って. E 上で $\nabla f \leqq m$ となる. (終)

5. potential 作用素から resolvent を構成する問題 (I)

この節では resolvent を除いて. 「E 上に正の Radon 測度 μ (台は E 全体). 及び (SCM) をみたす $\mathbb{N}(\mu)$ から $\mathbb{C}$ への連続線型写像 ∇ が与えられたとき. ∇.1) ～ ∇.6) をみたす resolvent が存在するか」という問題を考える. E が compact の時は容易であり. E が compact でないときは未だ結果は得られていない。

定理 4 E を compact とし. μ 及び (SCM) をみたす. 連続な $\nabla : \mathbb{N}(\mu) \to \mathbb{C}$ が与えられたとする. このとき. ∇.1) ～ ∇.6) をみたす $(\nabla_p)_{p>0}$ が唯一通り存在する.

証明には次の補助定理が基本的な役割を果す.

補助定理 各 $p>0$ について. 任意の $g \in \mathbb{B}$ に対し. 満足すべき $f^{(p)} \in \mathbb{N}$ 定数 c_p が唯一通りに存在して

$$g = (I + p\nabla) f^{(p)} + c_p$$

とかける. 又. $g \in \mathbb{C}$ ならば $f^{(p)} \in \mathbb{N} \cap \mathbb{C}$ である.

この補助定理を使うと. $g \in \mathbb{B}$ を $g = (I + p\nabla) f^{(p)} + c_p$ と表わしておき

$$\nabla_p g = \nabla f^{(p)} + c_p / p$$

と定義すれば，$(V_p)_{p>0}$ が V.1)〜V.6) をみたすことを示すのはそう困難ではない。

更に詳しく次のことも分る．

<u>定理 5</u>　E を compact とする．μ，V が定理 4 のように与えられたとき，$(V_p)_{p>0}$ が

$$(V.7) \quad \lim_{p\to\infty} \| pV_p f - f \| = 0 \qquad \forall f \in \mathbb{C}$$

をみたすための必要充分条件は，$\{ Vf + c \mid f \in \mathbb{N};\ c$ は定数$\}$ が，$\mathbb{C}$ で dense なことである．

定理 5 の条件の下では，$\mathbb{C}$ 上の強連続 Markov 半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ が存在して

$$V_p = \int_0^\infty e^{-pt} P_t \, dt \qquad (\forall p > 0)$$

となる．$(P_t)_{t>0}$ の generator を A とすると，$V(\mathbb{N} \cap \mathbb{C}) \subset D(A)$ となり，Poisson 方程式

$$AVf = -f \qquad (f \in V(\mathbb{N} \cap \mathbb{C}))$$

の成立することが (V. 6) から直ちに導かれる。

6. potential 作用素から resolvent を構成する問題 (II)

5 と同じ問題を E が compact でないときに考えるのは大変困難である。5 と同じように，μ を E 全体を台とする正の Radon 測度，V を $\mathbb{N}(\mu)$ から $\mathbb{C}$ への連続線型写像と~~する~~し，

(SCM)をみたすとする．先ず次のことは分る．

<u>定理 6</u>　与えられた μ と V に対し，

$V.1)$　　$pV_p 1 = 1$

$V.6)$　　$V_p f - Vf + pV_p Vf = 0 \qquad \forall f \in N(\mu)$

をみたす核 V_p は存在すれば一通りであり，$V.2)$，$V.3)$ もみたす．

証明は．$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset E$，$\bigcup_{n\geqq 1} F_n = E$．となる compact 集合の列をとる。前節補助定理を用いると．各 F_n について任意の $g \in \mathbb{B}$ に対し．$f_n^{(p)} \in N_{F_n}$，定数 $C_p^{(n)}$ が存在して．F_n 上で $g = (I + pV) f_n^{(p)} + C_p^{(n)}$ と出来る。$g_n = (I + pV) f_n^{(p)} + C_p^{(n)}$ とおくと．(SMP) から．$\| g_n \| \leqq \| g \|$ $(\forall n \geqq 1)$ が分る．$g_n \to g$ (各点収束) で $\| g_n \| \leqq \| g \|$ であるから．Lebesgue の定理で

$$V_p g = \lim_{n\to\infty} V_p g_n = \lim_n V_p [(I + pV) f_n^{(p)} + C_p^{(n)}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [V f_n^{(p)} + C_p^{(n)}/p]$$

となり．V_p は唯一通りにきまる．

$V.1) \sim V.6)$ をみたす resolvent が必ずしも存在しないことは次のような例で分る．

例 1．　$E = R^1$　　$\mu(dx) = dx$

$$Vf(x) = \int_x^\infty f(y)\,dy \qquad f \in N$$

とする．∇は（SCM）をみたす$\mathbb{N}$から$\mathbb{C}$への連続な線型写像であって，

$$\nabla_p g(x) = \int_x^\infty e^{-p(y-x)} g(y)\,dy \qquad g \in \mathbb{B} \quad x \in R^1$$

が $\nabla.1)$，$\nabla.5)$をみたす唯一の作用素である．$(\nabla_p)_{p>0}$は$\nabla.1)$ $\nabla.2)$ $\nabla.3)$ $\nabla.5)$ $\nabla.6)$をみたすが再帰性の条件$\nabla.4)$は満さない．

例2．　$E = R_+ = [0,\infty)$，　$\mu(dx) = dx$

$$\nabla f(x) = \int_x^\infty f(y)\,dy \qquad f \in \mathbb{N}$$

とする．上と同様に．

$$\nabla_p g(x) = \int_x^\infty e^{-p(y-x)} f(y)\,dy \qquad f \in \mathbb{B}.\ x \in R_+$$

は$\nabla.1)$，$\nabla.2)$，$\nabla.3)$，$\nabla.6)$をみたす唯一のresolventであるが．再帰性の条件$\nabla.4)$，不変測度の条件$\nabla.5)$は満されない。

$\nabla.1) \sim \nabla.6)$迄をみたすresolvent $(\nabla_p)_{p>0}$が存在するための必要充分条件は何であるか、という問題は興味があるが満足な結果は得られていないので省略する．

7．あと書き．

以上証明の仕方は全く異なるが，問題の立て方と定理の内容はEが可算集合の場合筆者により考察された[3]，[4]，[5]の一般な空間への拡張になっている。定理1，2，3，6につい

ては、もっと強い仮定の下で、そして、もっと不必要に複雑な方法で筆者[6]に証明されている。定理4 については、D. Revuz の類似な結果[8], [9]がある。が、証明は、ここで荒筋を述べたことゝは異なっている。しかし[6]における強い仮定を除き、証明を簡略化するのには、[8], [9]の考えを随所に用いた。Eに位相を考えない一般の測度空間の場合、Harris の意味で再帰的と呼ばれる Markov resolvent に対し、定理1, 2, にあたることは、Duflo [1] にも述べられていて、その後、出来るだけ広いクラスの null charge の空間に対して、potential 作用素を定義する努力も Meyer [7] 等で行われている。なお、半完全最大値の原理という名称は Herz [2] から来ている。

参考文献

[1] M. Duflo : Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov ~~ne~~ irreductibles, Bull. Soc. Math. France, 98, (1970) 127-163.

[2] C. Herz : Les théorèmes de renouvellement. Ann. Inst. Fourier, Grenoble t. 15 (1965) 169-188

[3] R. Kondō : On weak potential operators for re-

current Markov chains with continuous parameters. Osaka J. Math. 4 (1967) 327-344

[4] : On a construction of recurrent Markov chains, Osaka J. Math. 6 (1969), 13-28

[5] : On a construction of recurrent Markov chains II, ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Т 15 (1970) 510-518.

[6] : On weak potential operators for recurrent Markov processes, J. Math. Kyoto Univ. 11-1 (1971) 11-44.

[7] P. Meyer : Solutions de l'equation de Poisson dans le cas recurrent, Univ. de Strasbourg, Sem. de Probabilités 1969/1970 251-269.

[8] D. Revuz : Application d'un theoreme de Mokobodzky aux operateurs potentiels dans le cas recurrent, Univ. de Strasbourg, Sem. de Probabilités 1969/1970 208-215

[9] : Sur la theorie du potential pour les processus de Markov recurrents, to appear.

[10] T. Ueno : Some limit theorems for temporally discrete Markov processes. J. Fac. Sci. Tokyo sect I, 7 (1957)